4C

УДК 517.9

И.А. Сыпко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83050, г. Донецк, пр. Богдана Хмельницкого, 84, *sypko_i@i.ua*

Приближенный анализ процесса кристаллизации металла

I.A. Sypko
Donetsk National Technical University, Ukraine
Ukraine, 83050, c. Donetsk, Bogdana Khmelnitskogo av. 84, sypko_i@i.ua

Approximate Analysis of the Crystallization Process of the Metal

І.О. Сипко
ДВНЗ Донецький національний технічний університет, м. Донецьк, Україна
83650, Донецьк, пр. Б. Хмельницького, 84, *sypko_i@i.ua*

Наближений аналіз процесу кристалізації металу

Рассматривается задача тепловой обработки металла. Строится приближенное решение задачи. Получены оценки для температуры и теплового потока. В ходе численных экспериментов определены параметры тепловых потоков при отделении от стенок кристаллизатора.
Ключевые слова: слиток, кристаллизатор, металл, минимизация функционала, электрошлаковый переплав.

The problem of thermal processing of metal is considered. The approximate solution is constructed. Estimations for a temperature and thermal stream are got. In the numerical experiments, the parameters of the heat flow to separate from the walls of the mold.
Key words: ingot, crystallizer, metal, minimization of the functional, electroslag remelting.

Розглядається задача теплової обробки металу. Будується наближений розв'язок задачі. Доведені оцінки на температуру і тепловий потік. У ході чисельних експериментів визначено параметри теплових потоків при відділенні від стінок кристалізатора.
Ключові слова: злиток, кристалізатор, метал, мінімізація функціоналу, електрошлаковий переплав.

Распространение тепла в различных средах оказывает большое влияние на характер протекания многих важных для практики процессов. Среди задач, связанных с распространением тепла, выделяется класс задач, в которых исследуемое вещество переходит из одной фазы в другую с выделением или поглощением тепла.

Целью данной работы является моделирование процесса кристаллизации металла, изучение процесса завершения получения слитка в кристаллизаторе путем его вытягивания.

Рассматривается задача управления информационными процессами при автоматизации технологий тепловой обработки металла, на основе математического моделирования, анализа статистических данных и теплофизических экспериментальных измерений. В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на пространственной задаче Стефана, с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе.

Постановка задачи

В настоящее время электронно-лучевой переплав (ЭЛП) является одним из наиболее эффективных способов повышения служебных характеристик металлов и сплавов. Он применяется в исследовательской практике и промышленности для получения особо чистых металлов и сплавов с высокими физико-химическими и механическими свойствами.

Накопленный к настоящему времени экспериментальный материал по опытно-промышленному применению электронно-лучевого переплава не только подтверждает его преимущество по сравнению с другими методами вакуумной металлургии, но и выявляет ряд преимуществ. ЭЛП является наиболее приемлемым и экономически оправданным процессом получения особо чистых ниобия, тантала, циркония, ванадия, меди, никеля, железа и других металлов и сплавов на их основе. Исключение составляют металлы с высокой упругостью паров в точке плавления, например хром и сплавы на его основе.

Весьма эффективного применения электронно-лучевого переплава для повышения качества специальных сталей и сложнолегированных сплавов на основе никеля и железа. При переплаве указанных материалов одновременно с резким уменьшением содержания водорода, азота и кислорода происходит практически полное удаление многих легкоплавких примесей (свинца, цинка, висмута, олова и др.), снижается содержание неметаллических включений. Наблюдается также диспергирование и более равномерное распределение по сечению слитка оставшихся в металле неметаллических включений.

Значительный прогресс в области электронно-лучевой технологии достигнут в результате перехода от прямого переплава расходуемой заготовки в кристаллизатор к переплаву с использованием промежуточной емкости (ЭЛПЕ) и способу формирования слитка в горизонтальном кристаллизаторе (ЭЛПГ) [1].

Пусть $D = (-1 < x < 1, y < 0)$ – полуполоса, заполненная твердым металлом. Обозначим через $u(x, y)$ температуру этого металла. В работе [2] построена функция $u(x, y)$ как решение соответствующей краевой задачи.

Отождествим теперь температуру $u(x, y)$ с температурой твердого слитка, находящегося в кристаллизаторе при электрошлаковом переплаве. Для вытягивания слитка из кристаллизатора поверхность слитка предварительно обогревается тремя электронными лучами W_1, W_2 и W_3, причем мощность W_3 одного из них равномерно распределена в центральной зоне $\{-1 \le x \ge 1, y = 0\}$, а два других сконцентрированы по краям $x = \pm 1$ [2]. Независимо от того, в каком отношении находится температура поверхности слитка с критической температурой T^*, при которой поверхность слитка отделяется от стенок кристаллизатора, теплообмен слитка с кристаллизатором осуществляется по формуле

$$u_x \pm \omega_0 u = 0, x = \pm 1, -\infty < y < 0 .$$

Для получения температуры слитка достаточно положить $v(x) = (W_1, W_2, W_3)$. Далее, введем в рассмотрение функционал

$$I(v) = \int_H^0 (u(1, y) - T^*)^2 \, dy.$$

Рассматривается задача. Требуется определить поток $v(x)$ из допустимого множества U, доставляющий наименьшее значение функционалу $I(v)$. Минимизирующая последовательность v_n строится по формуле $v_{n+1} = v_n + \varepsilon_n(v_{n-1} - v_n)$, параметр ε_n выбирается из условия $\min I(v_n + \varepsilon_n(v_{n-1} - v_n)),\ 0 \le \varepsilon_n \le 1$ [3]. В качестве области определения функции U берется множество кусочно-постоянных ступенчатых функций:

$$v = v_k, x_k \le x \le x_{k+1}, v_k = const, k = 0,1,2,...,m.$$

При этом формула (5) примет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n(1+\omega_0 \frac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})} \sum_{k=0}^{m} v_k \frac{\sin\lambda_n x_{k+1} - \sin\lambda_n x_k}{\lambda_n},$$

а $I(v) = I(v_0, v_1, v_2, ..., v_m)$.

При численной реализации задачи необходимо учесть ограничение [4] $2500 \le v(x) \le 5000$, здесь $v(x)$ – мощность потока в единицах МВт/м^2, а также $\omega = 2{,}66$ (число Пекле), $\omega = 3{,}05$ (число Нуссельта).

Способы решения задачи

Построение минимума функционала $I(v)$,

где $I(v) = \int_H^0 (u(1,y) - T^*)^2\,dy,\ u_0(x,y) = \dfrac{2\cos\lambda_0 x e^{\mu y}}{\mu(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\dfrac{\sin\lambda_0}{\lambda_0}v = f_0(x,y)v$,

$\mu_k = -\dfrac{\omega}{2} + \sqrt{\dfrac{\omega^2}{4} + \lambda_k^2}$ $n = 1,2,3...\lambda_n$ – положительные корни уравнения $\lambda = \omega_0 ctg\lambda$.

Обозначим через $u(x,y)$ температуру металла. Отождествим теперь температуру $u(x,y)$ с температурой твердого слитка, находящегося в кристаллизаторе при электрошлаковом переплаве.

Необходимо найти $\min I$ и v_1. Минимум функционала I находим из условия

$$\frac{\partial I}{\partial v} = 2\int f_0(1,y)v - T^*)f_0(1,y)dy = 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$v_0 = 4T^* \frac{\lambda_0\mu_0(1+\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}{\sin 2\lambda_0},$$

$$I(v_0) = v_0^2 \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\mu_0^3\lambda_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2} - (T^*)^2 H - 2T^* v_0 \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}.$$

Второе приближение. Требуется найти минимум функционала

$$I(v) = \int_H^0 (u_2(1,y) - T^*)^2\,dy,$$

если

$$u_0(x,y)=\frac{2\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\frac{\sin\lambda_0}{\lambda_0}\nu+\frac{2\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\frac{\sin\lambda_0}{\lambda_0}\nu=\left[f_0(x,y)+f_1(x,y)\right]\nu.$$

Необходимо найти v_2 и $I(v_2)$. Найдем теперь минимум функционала I, в случае когда $u_1(x,y)=(f_0(x,y)+f_1(x,y))v$,

где $f_1(x,y)=2\dfrac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\dfrac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}$.

Поступая, аналогично тому, как это было сделано в случае нулевого приближения, получим

$$v_1=2T^*\left[\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}+\frac{\sin 2\lambda_2(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\right]A,$$

где

$$A=\frac{\sin^2\lambda_0(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_0\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2}+\frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^3\lambda_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2}+$$

$$+2\frac{\sin 2\lambda_0\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_0 H})(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})\lambda_1\mu_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}.$$

Далее, имеет место следующая формула:

$$I(v_1)=v_1^2\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\mu_0^3\lambda_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2}+v_0^2\frac{\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})}{2\mu_1^3\lambda_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2}+$$

$$+2v_1^2\frac{\sin 2\lambda_0\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_0 H})(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})\lambda_1\mu_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}-$$

$$-2T^*v_1\left[\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}+\frac{\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\right]-H(T^*)^2.$$

Минимизация $I(v)$ при ступенчатой функции $v(x)$.

Имеем $u(x,y)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})}\int\limits_0^1 v(\zeta)\cos\lambda_n\zeta d\zeta$,

здесь $v(x)=v_1$ при $0\le x\le x_1$, $v(x)=v_2$ при $x_1\le x\le 1$, $N_1\le v(x)\le N_2$.

В дальнейшем положим $v_2 = N_2$ и $f_0(x,y) = 2\dfrac{\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}(a\nu_1 + bN_2)$.

Требуется найти $\min I$ и v_1, где $I(\nu_1, N_2) = \int_H^0 (f_0(1,y)(a\nu_1 + bN_2) - T^*)^2 dy$, т.е. $\dfrac{\partial I}{\partial \nu_1} = 0$.

Имеем

$$\nu_1 = \left[2T^*\frac{\cos\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} - 2bN_2\frac{\cos^2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{\mu_0^3(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^3}\right]\left[2a\frac{\cos^2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{\mu_0^3(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^3}\right]^{-1},$$

Здесь $a = \dfrac{\sin\lambda_0 x_1}{\lambda_0}$, $b = \dfrac{\sin\lambda_0 - \sin\lambda_0 x_1}{\lambda_0}$.

$$I(\nu_1, N_2) = \int_H^0 (f_0(1,y)(a\nu_1 + bN_2) - T^*)^2 dy =$$

$$= \left[2(a\nu_1 + bN_2)\frac{2\cos\lambda_0}{\mu_0^2(1+\omega\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\right]^2 \frac{1-e^{2\mu_0 H}}{\mu_0} - 2T^*(a\nu_1 + bN_2)\frac{\cos\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} + T^{*2}.$$

Далее, имеем

$$u_1(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\int_0^1 \nu(\xi)\cos\lambda_0\xi d\xi + 2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\int_0^1 \nu(\xi)\cos\lambda_0\xi d\xi =$$

$$= 2\frac{\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}(a_0\nu_1 + b_0 N_2) + (a_0\nu_1 + b_0 N_2) + 2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_0 y}}{\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}(a_1\nu_1 + b_1 N_2),$$

где $a_0 = \dfrac{\sin\lambda_0 x_1}{\lambda_0}$, $b = \dfrac{\sin\lambda_0 - \sin\lambda_0 x_1}{\lambda_0}$, $a_1 = \dfrac{\sin\lambda_1 x_1}{\lambda_1}$, $b_1 = \dfrac{\sin\lambda_1 - \sin\lambda_1 x_1}{\lambda_1}$,

$$f_0(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})},\quad f_1(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}.$$

Таблица 1 – Значения тепловых потоков

ω_0	λ_0	λ_1	T	H	I (υ_0)	I (υ_1)	I* (υ_1)
0,4	1,2646	3,9352	0,9	–3,0	226,77	148,999	59,9
0,4	1,2646	3,9352	0,9	–4,0	237,580	58,868	75,6
0,4	1,2646	3,9352	0,9	–6,0	241,625	166,516	95,1
0,4	1,2646	3,9352	0,95	–3,0	244,449	147,191	66,7
0,4	1,2646	3,9352	0,95	–4,0	264,854	156,838	84,2
0,4	1,2646	3,9352	0,95	–6,0	238,346	164,304	100,5

Были проделаны численные эксперименты при определенных параметрах [5]. Полученные результаты были представлены в табл. 1. Анализ численных результатов показывает убывание значения функционала на первом и втором приближениях, что соответствует смыслу теплофизических процессов происходящих при электрошлаковом переплаве (ЭШП).

Список литературы

1. Патон Б.Е. Избранные труды / Патон Б.Е. – Киев : Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.
2. Шевченко А.И. Моделирование одного класса сложных систем с нечетким управлением / А.И. Шевченко, А.С. Миненко, И.А. Сыпко // Доп. НАН України. – 2013. – № 8. – С. 52-54.
3. Сыпко А.И. Приближенное моделирование процесса кристаллизации при наличии конвекции / А.И. Сыпко // Искусственный интеллект – 2013. – № 2. – С. 80-85.
4. Сыпко А.И. Численное моделирование процесса кристаллизации металла / А.И. Сыпко // Искусственный интеллект – 2014. – № 1. – С. 153-159.
5. Будак Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов – Москва : Наука, 1980. – 686 с.

References

1. Paton B.E. Selected works / Paton B.E. - Kiev: Electric Welding Institute named E.O. Paton of the NAS of Ukraine, 2008. – 893p.
2. Shevchenko A.I., Minenko A.S., I.A. Sypko Modeling of the one class complex systems whit fuzzy control // Reports of National Academy of Sciences of Ukraine –2013. – № 8. – P. 52-54.
3. Sypko I.A. Approximate modeling of the crystallization process in the presence of convection // Artificial intelligence –2013. – № 2. – P. 80-85.
4. Sypko I.A. Numerical modeling of the crystallization process of metal // Artificial intelligence. 2014. № 1. P. 153-159.
5. Budak B.M., Samarskiy A.A., Tikhonov A.N. Collection of problems on mathematical physics. – Moscow: Science, 1980. – 686 p.

RESUME

I.A. Sypko

Numerical Modeling of the Crystallization Process of Metal

Background. Among the problems associated with the distribution of heat, there is a class of problems in which the investigated substance passes from one phase to another, with the release or absorption of heat.

Materials and methods. The purpose of this work is to substantiate the mathematical model of the process of crystallization of metal. The problem of control of technological process of metals thermal processing is considered. As information resource the three dimension convection Stefan problem in liquid phase is investigated.

Result. This paper extend to time-dependent case some result obtained by the author for steady-state Stefan problem with convection. To determine the optimal thermal conditions of formation of ingot calculations were carried out in the framework of the mathematical model of thermal processes in a cylindrical ingot, adapted for the case of hollow ingot. In the model of liquid metal is poured into the mould portions, and a wedge of it is pulled out periodically.

Conclusion. A mathematical model which allows to determine the thermal mode in which it is defined. Simulated process of crystallization of metal, passing in special metallurgy, namely studied the process of completion of the receipt of an ingot in the mould by stretching.

The problem of thermal processing of metal is considered. The approximate solution is constructed. Estimations for a temperature and thermal stream are got.

The relevance of the presented work is due both to the practical demands of fuzzy control of the process of crystallization for the object with complex geometry.

Статья поступила в редакцию 08.04.2014.